Случайные события. Вероятность

1. Комбинаторика

В основе решения задач на комбинаторику лежат следующие два правила:

1. Правило сложения. Если некоторый элемент A можно выбрать m способами, а другой элемент B — n способами, исключающими друг друга, то выбор какого-нибудь одного из этих элементов (либо A, либо B) можно осуществить $m + n$ способами.

2. Правило умножения. Если элемент A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов $(A,\ B)$ в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Размещениями из n различных элементов по k называются всевозможные упорядоченные множества, содержащие k элементов, взятых из данных n элементов, отличающиеся друг от друга или составом элементов, или их порядком.

Число размещений из n различных элементов по k элементов без повторений определяется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1}$$

Любое множество из k элементов, составленное из данных n элементов множества, называется размещением с повторениями из n элементов по k. Число всех размещений из n различных элементов по k с повторениями находится по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{2}$$

Перестановками из n различных элементов называются всевозможные размещения из этих n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком элементов. Число перестановок из n различных элементов без повторений определяется по формуле

$$P_n = n! \tag{3}$$

Перестановкой с повторениями заданного состава $(k_1,\ k_2,\ \ldots, k_n)$ из элементов данного множества объемом n называется всякая упорядоченная выборка объема $m = k_1+k_2+\dots+k_n$, составленная из элементов этого множества так, что элемент x_1 повторяется k_1 раз, x_2 повторяется k_2 раз и так далее, элемент x_n повторяется k_n раз.

Число всех различных перестановок с повторениями указанного состава $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ определяется по формуле

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}. \tag{4}$$

Сочетаниями из n различных элементов по k называются всевозможные размещения, содержащие k элементов, взятых из данных n элементов, отличающиеся друг от друга, по крайней мере, одним элементом.

Число сочетаний из n различных элементов по k без повторений определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{5}$$

Число сочетаний без повторений из n различных элементов по k равно числу сочетаний из этих же n элементов по $n-k$: определяется по формуле

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Разобьем множество всех выборок объема k, составленных из n элементов данного множества, на классы эквивалентности, относя к одному классу все выборки одинакового состава. Такие классы эквивалентности называются сочетаниями с повторениями из n элементов по k, а их число выражается формулой

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \tag{6}$$

Решение задач на отыскание числа размещений (с повторениями или без них), перестановок и сочетаний удобно проводить по следующей схеме:

- определяем число элементов (объем) основного множества;

- подсчитываем число элементов, входящих в выборку;
- выясняем, упорядочены ли выборки;
- выясняем, идет ли речь о подсчете числа выборок данного состава или же о подсчете числа возможных составов выборок;
- используем соответствующие формулы (1)–(6).

1.1. В столовой имеется четыре первых блюда, пять вторых и три третьих. Сколькими способами можно составить из них полноценный обед?

Решение. Обозначим первые блюда цифрами 1, 2, 3, 4, вторые — буквами русского алфавита а, б, в, г, д, третьи — буквами греческого алфавита α, β, γ. Тогда любому обеду можно поставить во взаимно однозначное соответствие строку (x_1, x_2, x_3), где x_1 выбирается из четырехэлементного множества цифр, x_2 (независимо от x_1) — из пятиэлементного множества букв русского алфавита, x_3 (независимо от x_1, x_2) — из трехэлементного множества букв греческого алфавита. Следовательно, по правилу произведения всего существует $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ возможностей выбора обеда из трех блюд.

1.2. В классе 20 мальчиков и 20 девочек. Для участия в КВНе нужно выделить танцевальный дуэт, дуэт певцов и дуэт ведущих (каждый из которых состоит из мальчика и девочки). Сколькими способами это можно сделать, если все участники поют, танцуют и имеют хорошую дикцию?

Решение. Выделить из 20 мальчиков одного танцора, певца и одного ведущего можно столькими способами, сколько существует упорядоченных трехэлементных подмножеств в данном множестве из 20 элементов, то есть A_{20}^3 способами. Аналогично имеется A_{20}^3 способов выделить из множества девочек танцовщицу, певицу, ведущую. По правилу произведения находим общее число способов выделения дуэтов певцов, танцоров и конферансье: $A_{20}^3 \cdot A_{20}^3 = (20 \cdot 19 \cdot 18)^2 = 46785600$.

1.3. Даны натуральные числа от 1 до 30. Сколькими способами можно выбрать из них три числа так, чтобы их сумма была четной?

Решение. Сумма трех чисел будет четной, если все слагаемые — четные числа или одно слагаемое четное, а два других — нечетные. Из 15 четных чисел три числа можно выбрать C_{15}^3 различными способами, так как порядок выбранных слагаемых безразличен. Кроме этого, из 15 нечетных чисел два числа можно выбрать C_{15}^2 различными способами и после каждого такого выбора по одному четному числу из 15 можно выбрать C_{15}^1 способами. По правилу произведения число выборок, содержащих два нечетных числа и одно четное, равно $C_{15}^2 \cdot C_{15}^1$. Наконец, применяя правило суммы, находим общее число выборок, удовлетворяющее условию задачи:

$$C_{15}^3 + C_{15}^2 \cdot C_{15}^1 = 2030.$$

1.4. На полке помещены 7 книг разных авторов и трехтомник одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

Решение. Представим себе три книги одного автора как одну книгу. Тогда получим 8 книг, которые можно расставить на полке P_8 способами. Учитывая при этом, что 3 книги одного автора можно переставлять друг с другом P_3 способами, и пользуясь правилом произведения, находим общее число всех способов расстановки книг на полке при указанном условии:

$$P_8 \cdot P_3 = 3! \cdot 8! = 241920.$$

1.5. Для автомобильных номеров используются 10 цифр и 28 букв. Каждый номер состоит из трех букв и четырех цифр. Какое максимальное число машин может получить номера при такой системе нумерации?

Решение. Сначала осуществим выбор четырех цифр. Каждый такой комплект цифр представляет собой четырехэлементную выборку из данного десятиэлементного множества цифр, то есть является размещением с повторением из 10 элементов по 4. Следовательно, общее число таких комплектов равно 10^4. Остается лишь исключить из рассмотрения выборку вида $00 - 00$. Аналогично выбор трех букв из 28 осуществляется 28^3 числом способов. Поскольку номер каждой машины есть упорядоченная "пара", состоящая из комплектов цифр и букв, то по правилу произведения число всех номеров будет равно $(10^4 - 1) \cdot 28^3 = 219498048$.

1.6. Сколькими способами на первой горизонтали шахматной доски можно расставить следующие одноцветные фигуры: две ладьи, два коня, два слона, одного ферзя и одного короля? (Замечание: правила шахматной игры не учитываются.)

Решение. Всякой расстановке шахматных фигур взаимно однозначно соответствует выборка заданного состава $(2,2,2,1,1)$ объемом $2+2+2+1+1=8$. Следовательно, по формуле (4) искомое число способов равно

$$P_8(2,2,2,1,1) = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 5040.$$

1.7. Сколькими способами можно распределить 6 одинаковых папок по трем ящикам письменного стола, если каждый ящик может вместить все папки?

Решение. Рассматриваемое множество состоит из трех различных элементов, а выборки имеют объем, равный шести. Поскольку порядок расположения папок в ящиках роли не играет, то искомое число способов равно числу сочетаний с повторениями из трех элементов по шесть в каждом. Следовательно, по формуле (6) имеем $\overline{C}_3^6 = 28$.

1.8. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах "дискета", "эллипсоид", "математика"?

Решение. В слове "дискета" все буквы различны, всего их 7. Тогда $P_7 = 7! = 5040$. В слове "эллипсоид" 9 букв, среди них буква "л" встречается 2 раза, буква "и" встречается 2 раза. Тогда $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$,

$$P_9(1,2,2,1,1,1,1) = \frac{9!}{1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 90720.$$

В слове "математика" 10 букв, из них буква "м" встречается 2 раза, буква "а" встречается 3 раза, буква "т" встречается 2 раза. Тогда $n = 10$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$,

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

1.9. В сумке содержится 30 CD-дисков, из них 8 с программным обеспечением, остальные — игровые. Сколькими способами из них можно отобрать 6 дисков так, чтобы 4 из них были с программами и 2 — игровых?

Решение. Всего в сумке 30 CD-дисков. Число всех различных способов выбора 4 дисков с программами из 8 определяет C_8^4, а число способов выбора двух игровых дисков из 22 определяет C_{22}^2. По правилу произведения в комбинаторике получаем: $C_8^4 \cdot C_{22}^2 = 16170$ — столькими способами можно отобрать 6 дисков так, чтобы 4 из них были с программами и 2 — игровых.

Задачи для самостоятельного решения

1.10. На студенческой вечеринке присутствуют 14 девушек и 17 парней. Сколькими способами можно выбрать из них разнополую пару для танца?

1.11. Студенту необходимо сдать 5 экзаменов в течение 12 дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов?

1.12. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7?

1.13. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 5,7, 9, если цифры в числе не повторяются?

1.14. Сколькими способами можно составить четырехзначное число, все цифры которого различны?

1.15. В хоккейном клубе 8 нападающих, 5 защитников и 2 вратаря. Сколько различных вариантов команды может составить тренер, если на лед выходят вратарь, два защитника и тройка нападающих?

1.16. Десять участников марафонского забега разыгрывают одну золотую, одну серебряную и одну бронзовую медали. Сколькими способами эти награды могут быть распределены между спортсменами?

1.17. Имеется три различных кресла и пять рулонов обивочной ткани разных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку кресел?

1.18. Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?

1.19. В киоске продаются открытки 6 видов. Сколькими способами можно приобрести в нем: а) 4 открытки; б) 4 различные открытки?

1.20. Сколькими способами можно нанизать на нитку 4 зеленых, 5 синих и 6 красных бусинок?

1.21. Сколько перестановок можно сделать из букв слова
а) врач; б) папа ?

1.22. В партии содержится 30 деталей, из них 8 дефектных. Сколькими способами из этой партии можно отобрать 6 деталей так, чтобы 4 из них были качественные и 2 дефектные?

1.23. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из 10 кандидатов?

1.24. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

1.25. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах "замок", "ротор", "топор", "колокол"?

1.26. Замок на сейфе зашифрован кодом из 10 цифр $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. Замок открывается при определенной комбинации. Хватит ли 10 дней, чтобы открыть сейф, если "рабочий день" продолжается 13 часов, а на набор одной цифры уходит полсекунды? Ответ обоснуйте.

1.27. Вычислите $\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4}$.

1.28. Найдите n, если

$$\frac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240 \cdot A_{n+3}^{k+3}, \quad k \leq n.$$

1.29. Решите неравенство

$$C_{10}^{n-1} > 2 \cdot C_{10}^{n}.$$

1.30. Возведите в шестую степень двучлен $(x^2 - y)$, воспользовавшись формулой бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$