## 0. Аксиоматический метод.

Все *Понятия* делятся на 2 класса: *неопределяемые*, или *первичные*, и *определяемые*, или *вторичные*.
Вторичные понятия определяются на основе первичных. Например, ворона — это птица, которая … (дальше идет уточнение, какая именно птица так называется). Можно попытаться определить понятие «птица» на основе других, еще более общих понятий. Рано или поздно мы доберемся до таких понятий, для которых не будет никаких оснований для определения. Такие понятия мы не определяем никак и называем первичными. Попытка определить первичные понятия приводит ровно к двум неудовлетворительным ситуациями (упражнение: какие это ситуации, и почему они неудовлетворительны?).
Определившись с понятиями, можно строить *Высказывания* относительно этих понятий.
Всякая математическая теория может быть представлена сетью переплетающихся логических цепочек высказываний (теорем).
Всякая логическая цепь теорем должна иметь начало (почему?).
Началом лог. цепи является *Аксиома* - теорема, которую не доказывают, а принимают на веру.
Теория считается построенной, если набор аксиом этой теории удовлетворяет двум требованиям: *непротиворечивости* и *полноты*.
Непротиворечивость аксиом означает, что из них нельзя вывести две теоремы, противоречащие друг другу.
Полнота набора аксиом означает, что любое высказывание, сформулированное на языке понятий теории, может быть либо доказано, либо опровергнуто на основании аксиом и ранее доказанных теорем.

Замечание: определение понятия НИКОГДА не начинается со слов «если» и «когда». Оно начинается с существительного (еще раз: Ворона — это *птица*, которая …).

## 1. Теория множеств.

*Множество* - понятие неопределяемое. Мн-во состоит из *Элементов*, эл-ты принадлежат мн-ву. Обозн: $a \in A$, $b \notin A$ (эл-т a принадлежит мн-ву A, эл-т b не принадлежит мн-ву A).
При перечислении эл-ты мн-ва записываются в фигурных скобках, например: $A=\{1,2,3\}$ - мн-во чисел 1,2,3. $1 \in A$, $4 \notin A$.
Нужно знать 5 операций над множествами: *включение, пересечение, объединение, разность, дополнение*

1) мн-во A включается в мн-во B (иначе — является подмножеством мн-ва B), если любой эл-т мн-ва A принадлежит мн-ву B. Обозн: $A \subset B$. Пример: $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{1,2,3\}$. $A \subset C$, $B \not\subset C$ (B не включается в C).
2) Пересечением мн-в A и B называется мн-во C, состоящее из эл-тов, общих для A и B. Обозн: $C=A \cap B$. Пр.: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $A \cap B=\{2,3\}$.
3) Объединением мн-в A и B называется мн-во C, состоящее из всех эл-тов мн-ва A и всех эл-тов мн-ва B. Обозн: $C=A \cup B$. Пр.: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $A \cup B=\{1,2,3,4\}$ (ответьте: почему числа 2 и 3 не выписаны по два раза?).
4) Разностью между мн-вом A и мн-вом B называется мн-во C, состоящее из тех эл-тов A, которые не вошли в B. Обозн: $C=A \setminus B$. Пр.: $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,3,5,6\}$, $A \setminus B=\{1,4\}$, $B \setminus A=\{6\}$.
5) *Универсальным* называется мн-во всех эл-тов в рамках данной задачи («мн-во всего»). Дополнением к мн-ву A называется разность между универсальным мн-вом и мн-вом A.

Множество, не содержащее ни одного эл-та, называется *пустым*. Обозн: $\varnothing$.

## 2. Математическая логика.

*Логика* - наука о том, как правильно строить высказывания, в частности, в мат. теориях (как правильно строить доказательства).
М.Л. - это Л., записанная на мат. языке и пригодная для проведения вычислений в автоматическом режиме на компьютерах.
*Высказывание* - первичное понятие МЛ. Высказывания можно разделить на *элементарные* и *составные*. Элементарные высказывания выбираются произвольным образом, из них составляются составные высказывания при помощи *логических операций*. Существует 5 основных логических операций: *отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация* и *эквиваленция*. Легче всего понять суть логических операций, изучая *Таблицы истинности*. Всякое высказывание может быть либо истинным, либо ложным. Истина и ложь называются значениями высказываний и обозначаются символами 1 и 0

1) отрицание высказывания А. Обозн: $\overline{A}$ (читается «не А»)

| A | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

2) Конъюнкция высказываний А и В (логическое «и», логическое умножение). Обозн: $A \wedge B$

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

3) дизъюнкция высказываний А и В (логическое «или», логическое сложение). Обозн: $A \vee B$

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

4) импликация высказываний А и В (следствие). Обозн: $A \Rightarrow B$

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

5) эквиваленция высказываний А и В (равносильность). Обозн: $A \Leftrightarrow B$

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Составное высказывание, истинное при любых значениях элементарных высказываний, называется *законом логики*. Доказать закон можно с помощью таблиц истинности. Составное высказывание, ложное при любых значениях элем. высказываний, наз. *Противоречием*.

## 3. Числовые системы.

1. *Натуральные числа*. Н.Ч. - используемые для счета: 1, 2, 3, ... Мн-во линейно упорядочено, всегда выполнимы операции +,*,^ (возведение в степень).
2. *Целые числа*. Мн-во Ц.Ч. получается добавлением к мн-ву Н.Ч. нуля и отриц. чисел. Выполнимы оп-ции: +,-,*,^.
3. *Рациональные числа*. Рац. число - это упорядоченная пара целых чисел, записываемых как m/n. Выполнимы операции: +,-,*,/ (кроме деления на 0),^.
4. *Действительные числа*. Рац. числа записываются конечными или периодическими десятичными дробями, мн-во Д.Ч. - это мн-во ***всех*** десятичных дробей: конечных, бесконечных периодических и бесконечных непериодических. Д.Ч., не являющиеся рациональными, наз. *иррациональными* (π, e, $\sqrt{2}$ и т.д.). К операциям над рац. числами добавляется возможность извлекать корни любой степени из положительных чисел и решать *трансцендентные* уравнения (логарифмические, тригонометрические и т.д.), правда, с определенными ограничениями.
5. *Комплексные числа*. К.Ч. можно представить как сумму действительного числа и так называемого *мнимого числа*. Мнимое число, в свою очередь, можно представить как произведение действ. числа на т.наз. *мнимую единицу* i, определяемую как положительный корень из -1:

$$z=x+i*y, \qquad i^2=-1.$$

К.Ч. соответствуют точкам плоскости с декартовой системой координат, где по оси X откладываются действ. ч., а по оси У — мнимые. Во мн-ве К.Ч. можно извлекать корни четной степени из отрицательных чисел, находить логарифмы отриц. чисел, синус и косинус к.ч. могут превышать 1 и т.д. - с точки зрения школьной математики, К.Ч. имеют много аномалий. В частности, квадратные уравнения во мн-ве К.Ч. всегда имеют ровно 2 корня, которые можно найти по известным нам со школы формулам, эти формулы оказываются универсальными (не зависят от знака дискриминанта).

Мн-во К.Ч. не является линейно упорядоченным, то есть к К.Ч. неприменимы понятия "больше" и "меньше".

Последовательность включений числовых множеств друг в друга: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

## 4. Отношения на числовых множествах.

Определение: *декартовым (прямым) произведением* двух мн-в называется множество всех упорядоченных пар, в которых первый эл-т берется из первого мн-ва, а второй - из второго. Упорядоченные пары обозначаются угловыми скобками: <a,b>.
Пр: A={a,b,c}, B={1,2}, A*B={<a,1>,<a,2>,<b,1>,<b,2>,<c,1>,<c,2>}
Аналогично можно ввести определение Д.П. 3-х и большего числа мн-в.

*Бинарным отношением* на мн-ве X называется всякое подмножество декартова произведения X на себя (*декартова квадрата мн-ва X*).
Пары <x,y>, являющиеся элементами бинарного отношения **,** обозначают как x*y.
Б.О. * наз. *рефлексивным*, если для любого x верно x*x. Пр: равенство, параллельность прямых.
Б.О. * наз. *антирефлексивным*, если для любого x выражение x*x ложно. Пр: неравенство, перпендикулярность прямых.
Б.О. * наз. наз *транзитивным*, если для любых x,y,z из мн-ва X из x*y и y*z следует x*z. Пр: равенство, отношение "больше", импликация, отношение включения.
Б.О. * наз. *симметричным*, если для любых x,y из x*y следует y*x. Пр: параллельность, перпендикулярность, дружба.
Б.О. * наз *антисимметричным*, если для любых x,y из x*y и y*x следует x=y. Пр: включение мн-в, отношение "больше или равно".

Б.О. * наз. *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Пр: параллельность, подобие фигур.

БО * наз. *отношением порядка*, если оно транзитивно и антисимметрично. Пр: «больше», «больше или равно»
.

## 5. Теория вероятности.

### 5.1. Комбинаторика.

1. Перестановки. *Перестановкой* наз. любой способ расставить эл-ты мн-ва в опред. порядке. Число всех П. мн-ва А, имеющего n эл-тов, равно n!=1*2*...*n.

Пр: число способов расставить на полке 6 книг равно 6!=1*2*3*4*5*6=720.

2. Размещения. *Размещением из n по k* наз. способ выбрать k эл-тов из мн-ва А, имеющего n эл-тов, и расставить их в некотором порядке.

Число всех разм. из n по k равно n!/(n-k)!

Пр: число способов выбрать 3 победителей из 10 участников равно 10!/7!=10*9*8=720.

3. Сочетания. *Сочетанием из n по k* наз. способ выбрать k эл-тов из мн-ва, имеющего n эл-тов без учета порядка.

Число всех сочет. из n по k обозначается символом $C_n^k$ и равно n!/k!/(n-k)!

Пр: число вариантов пригласить в гости 3 друзей из 10 равно $C_{10}^3$=10!/3!/7!=720/6=120.

### 2. Случайные события.

Понятие *События* в теории вероятностей - первичное. *Случайное С.* - это событие, которое в будущем может произойти, а может и не произойти, и это неизвестно заранее.

С.С. наз. *элементарными*, или *случаями*, если:

1) никакие два из них не могут произойти одновременно (*несовместны*);
2) все они имеют равные шансы произойти (*равновозможны*);
3) одно из них обязательно произойдет (образуют *полную группу*).

Пр: выпадение герба (Г) и решки (Р) при бросании 1 монеты - случаи;
выпадение 1,2,...,6 очков при бросании игрального кубика - случаи;
попадание и промах при выстреле - не случаи, т.к. они не равновозможны.

Кроме элементарных рассматриваются *составные события*, состоящие из нескольких элементарных.

Например, событие: "выпадение не менее 5 очков на кубике" состоит из 2 элем.: 5 и 6.

Те случаи, которые входят в составное событие, наз. *благоприятными*.

*Вероятностью* (составного) события А называется отношение числа благоприятных случаев (m) к числу всех случаев (n)

$$P(A)=m/n$$

Пр: вероятность выпадения Г при бросании 1 монеты - 1\2;
вероятность выпадения ГГ при бросании 2 монет - 1\4;
вероятность выпадения 6 при бросании кубика - 1\6;
вероятность вынуть черный шар из корзины с 4 белыми ш. и 5 черными ш. - 4\9;
вероятность вынуть 2 синих карандаша из коробки с 5 синими к. и 6 красными к. - $C_5^2/C_{11}^2$=5!2!9!/2!3!11!=2/11≈0.19;
вероятность попадания в мишень не равна 1\2, т.к. попадание - не случай.

Заметим, что сами элем. события можно рассматривать как составные, содержащие только 1 благоприятный случай.

Кроме того, можно рассматривать событие, которому не благоприятствует ни 1 случай - *невозможное событие* (P=0), а также событие, которому благоприятствуют все случаи - *достоверное событие* (P=1). Вероятность С.С. всегда заключена между числами 0 и 1.

Существует глубокая связь между теорией вероятности и теорией множеств. Всякое событие есть подмножество во мн-ве всех случаев (универсальном мн-ве, которое в Т.В. наз. *пространством элементарных исходов*).

Достоверное событие есть само пр-во элем. исх. Невозм. соб. - пустое мн-во. Два события могут произойти одновременно (*совместны*), если они пересекаются как мн-ва (у них есть общие элем. исходы), и т.д.

### 3. Свойства вероятности.

События А и В называются *независимыми*, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.

Пр: выпадение герба при первом бросании и герба при втором бросании — независимы.

Событие, состоящее в том, что не наступило событие А, называется *противоположным*, обозн: $\overline{A}$.

Пр: выпадение герба при однократном бросании противоположно выпадению решки.

События можно складывать, вычитать и перемножать.

*Суммой событий* А и В называется событие С, состоящее в том, что произошло А или В (или оба вместе). **Теорема** о сумме несовместных событий:
*Если события несовместны, то вероятность суммы равна сумме вероятностей*

$$\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

Пр: вероятность выпадения 5 или 6 очков на кубике: Р(5)+Р(6)=1/6+1/6=1/3.

*Произведением событий* А и В называется событие С, состоящее в том, что произошли А и В. **Теорема** о произведении независимых событий:
*Если события независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей*

$$\mathbf{P(AB)=P(A)P(B)}$$

Пр: вероятность выпадения двух гербов подряд: Р(Г)З(Г)=1/2*1/2=1/4

*Разностью событий* А и В называется событие С, состоящее в том, что произошло А и не произошло В. Разность — несамостоятельная операция, она выражается с помощью комбинации суммы и дополнения

$$\mathbf{A-B=A+\overline{B}}$$

**4. Случайные величины.**

*Сл. вел.* - это величина, которая может принять любое значение из некоторого мн-ва значений с той или иной вер-тью.

Пр: число выпавших очков на кубике — неизвестное заранее число от 1 до 6.

Соответствие между значениями С.В. и их вер-тями наз. *законом распределения*, записывается в виде таблицы.

Пр:

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | 2,3 | 4,1 | 5,7 |
| P | 0,2 | 0,5 | 0,3 |

Данная С.В. Принимает значение $x_1$=2,3 с вероятностью $p_1$=0,3, значение $x_2$=4,1 с вер-тью 0,5 и значение $x_3$=5,7 с вер-тью $p_3$=0,3.

Основное свойство закона распределения: сумма всех вероятностей в нижней строке таблицы равна 1 (почему?)

График этого соответствия наз. *полигоном распределения*.

Важнейшими харак-ками С.В. являются *математическое ожидание*, *дисперсия* и *среднеквадратичное отклонение (СКО)*.

Мат. ожидание. характеризует центр рассеяния, оно близко к среднему значению, получаемому на опыте (ожидаемое значение). Обозн: М(х).

$$M(X)=x_1*p_1+\ldots+x_n*p_n.$$

Дисп. характеризует разброс значений вокруг центра. Дисп. - это мат. ожидание от квадрата отклонения.

Отклонение: $\Delta X=X-M(X)$.

Дисп: $D(X)=M(\Delta X^2)$.

СКО — это корень из дисп.: $\sigma=\sqrt{D}$ .

## 6. Алгоритм.

Опред: А - это строго детерминированная последовательность действий, описывающая преобразование объекта из начального состояния в конечное, записанная с помощью понятных исполнителю команд (Угринович).

Требования к алгоритмам:

1)дискретность (пошаговость)
2)детерминированность (определенность)
3)понятность для исполнителя
4)завершаемость
5)результативность
6)массовость (применимость к разным наборам данных).

Основные структурные элементы алгоритмов:

1) линейный алгоритм: ...-команда1-команда2-...
2) ветвление (условный переход):
   ...-если(условие)-то(набор команд )-иначе(набор команд )-...
3) цикл:
   а) со счетчиком (выполняется до тех пор, пока счетчик не дойдет до некоторого значения);
   б) с условием (выполняется до тех пор, пока верно условие):
      б1) с предусловием (условие проверяется в начале цикла);
      б2) с постусловием (условие проверяется в конце цикла).

## 7. Языки программирования.

Поскольку в качестве основного исполнителя алгоритмов подразумевается компьютер, то алгоритмы должны быть записаны на понятном ему языке. Такого рода языки наз. Я.П. Более точно, процессор понимает язык так наз. машинных кодов, однако, этот язык настолько неудобен для записи алогритмов, что пришлось прибегнуть к созданию более удобных для человека языков, которые переводятся на язык машинных кодов специальными программами - компиляторами или трансляторами.

Языки программирования можно разделить на 3 класса по уровню: языки низкого уровня, языки высокого уровня и языки сверхвысокого уровня.
Языки низкого уровня: собственно машинный код и ассемблер. Команды маш. кода - это числа, указывающие процессору элементарные действия: поместить число в указанную ячейку памяти, прочитать число из указанной ячейки памяти, сложить два числа и т.д.
Ассемблер - те же самые маш. коды, но записанные в виде коротких слов (2-4 буквы). Применение: драйверы устройств, антивирусы, небольшие системные программы. Преимущества: компактность, быстродействие. Недостатки: трудоемкость разработки, отсутствие переносимости (машинная зависимость).

Языки высокого уровня: компилируемые и интерпретируемые.
1. Компилируемые языки: С и его модификации, Паскаль, Фортран и т.д. К.Я. переводятся на язык маш. кодов компилятором и преобразуются в исполнимый модуль (в системе Windows имеет расширение .exe), который может быть запущен, как отдельная программа. Преимущества: быстродействие, не требуют для выполнения дополнительных программ. Недостатки: трудно вносить изменения в код, возможна машинная зависимость.
2. Интерпретируемые языки: Бейсик, Перл, Питон. И.Я. переводятся на язык маш. кодов специальной программой - интерпретатором - каждый раз непосредственно во время выполнения. Преимущества: легко вносить изменения в код, высокая степень переносимости, легко освоить программирование. Недостатки: медленные, требуют наличия интерпретатора.
Деление на компилируемые и интерпретируемые языки условно. Существуют компиляторы для некоторых интерпретируемых языков, иногда возникает необходимость в интерпретации компилируемого языка.
3. Языки сверхвысокого уровня - скриптовые языки, нужны для автоматизации управления действия некоторых сложных программ. Например, многие действия по редактированию текстов в MS Word можно автоматизировать, написав программу на встроенном языке программирования. Программы на Я.С.У. как правило называются скриптами, в некоторых случаях — макросами, они применимы только для какого-то одного пакета программ. Относятся к интерпретируемым.

Программа, переводящая программный код с одного языка на другой, называется транслятором.

## 8. Программное обеспечение.

ПО - это совокупность программ.

**1. Классификации ПО.**

1. По назначению: системное, прикладное, инструментальное.
2. По условиям распространения: коммерческое, свободное, открытое.

Системное ПО: ОС (операционная система), драйвера устройств, утилиты (вспомогательные программы).

Прикладное ПО:

1) офис: текстовый процессор, табличный редактор, редактор презентаций, СУБД, переводчик;
2) мультимедиа: игры, аудиоплееры, видеоплееры, редакторы изображений;
3) предприятие: бухгалтерия, электронный документооборот, аудит;
4) интернет: браузер, эл. почта, интернет-пейджер (icq), торрент, IP-телефония (skype);
5) научное: компьютерная алгебра, система моделирования, САПР.

Инструментальное ПО: среда разработки ПО, СУБД (Википедия).

Комм. ПО - платное: OS Windows, MS Office, Adobe Photoshop.
Свободное По (СПО) - бесплатное: OS Linux, OpenOffice, GIMP.
Открытое ПО: поставляется вместе с кодом, любой пользователь может видоизменять код (OS Linux).

**2. Операционная система.**

ОС - совокупность программ, управляющих оборудованием и создающих среду для работы прикладных программ.

Функции:

1) загрузка приложений в ОП и их выполнение;
2) управление устройствами ввода-вывода и хранения информации;
3) распределение ОП между программами;
4) пользовательский интерфейс;
5) сетевые операции;
6) взаимодействие между процессами;
7) разграничение прав доступа пользователей;
8) защита ПО и персональных данных от вредоносных действий.

**3. Основные ОС**

Unix — платная, сервера, высокопроизводительные станции, суперкомпьютеры, специализированные компьютеры, системы управления. Графические средства развиты слабо. Стандарт POSIX.

Windows — платная, персональные компьютеры, сервера (однако многие администраторы жалуются на неустойчивость), развлечения. Хорошо развитая мультимедийная составляющая. Ориентирована на массового пользователя.

Mac OS (Макинтош) — платная, персональные компьютеры, акцент на мультимедиа, удобство пользователя. Стандарт POSIX.

Linux — свободная, открытая, однако имеются дистрибутивы, включающие проприетарное и даже платное прикладное ПО. Сервера, суперкомпьютеры, персональные компьютеры. Средства мультимедиа отстают в развитии от Windows и Mac OS, многие компьютерные игры недоступны. Стандарт POSIX.

## Лит-ра:


1. Главы 0-4 — Л.Я. Куликов. Алгебра и теория чисел.
2. Глава 5 – В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика.
3. Главы 6-8 – Н. Угринович. Информатика и информационные технологии. Учебник для 10-11 классов, а также Википедия.


## Упражнения.

1. Вспомнить и записать аксиомы Евклида.
2. Пусть А — множество букв предложения «Сегодня на улице очень холодно» а В —

множество букв предложения «Завтра будет гораздо теплее». Записать объединение, пересечение этих множеств, разности A\B и B\A, дополнения к множествам A и B.

3. Пусть A={a,b,c}, B={0,2,5}, C={Δ,o,⧫}. Записать B*A*C и C*A*B, где * -- декартово произведение.
4. Составить таблицу истинности для высказывания $A \wedge \overline{B} \to \overline{(C \vee B \to A)}$.
5. Найти сумму и произведение комплексных чисел 2+3i и 5-4i.
6. Найти сумму и произведение чисел: комплексного числа 7-5i и действительного числа 3.
7. Доказать, что отношение «сидеть за одной партой» является отношением эквивалентности. Найти фактор-множество. Доказать, что это отношение не является отношением порядка.