Случайные величины и законы их распределения

9. Дискретные и непрерывные случайные величины

Случайной называют величину, которая в результате опыта примет одно и только одно из возможных значений, заранее неизвестно какое именно. Случайные величины бывают дискретные и непрерывные. Дискретной называется случайная величина, которая принимает счетное либо конечное множество значений. Непрерывной называется случайная величина, множество значений которой непрерывно. Случайные величины будем обозначать через X, Y, Z и так далее. Их возможные значения — малыми буквами с индексами: x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Пусть X — случайная величина, а x_1, x_2, $\ldots$, x_n — ее возможные значения, каждое из которых она принимает с определенной вероятностью: $P(X = x_i) = p_i$, где $i = 1, 2, \ldots n$. События $X = x_1$, $X = x_2$, ..., $X = x_n$ — несовместные и составляют полную группу, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Составим таблицу:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

Эта таблица называется рядом распределения дискретной случайной величины. В этой таблице сумма вероятностей равна единице: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Дискретная случайная величина считается заданной, если известен ее ряд распределения. Ряд распределения является одним из способов задания закона распределения. Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически. Для этого в прямоугольной системе координат строят точки с координатами (x_i, p_i) и соединяют их отрезками прямых. Полученная фигура называется многоугольником распределения.

Функцией распределения или интегральной функцией распределения $F(x)$ называется вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее x, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Она обладает следующими свойствами:

- Значение интегральной функции распределения принадлежит отрезку $[0,1]$, то есть $0 \le F(x) \le 1$.
- Функция $F(x)$ неубывающая. Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le$ $\le F(x_2)$.
- Если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a,b]$, то:

  1) $F(x) = 0$ при $x < a$, 2) $F(x) = 1$ при $x > b$.
- Вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее отрезку $[a,b]$, равна

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Если же все возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси OX, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Для характеристики непрерывной случайной величины вводится дифференциальная функция распределения или плотность распределения вероятностей. Плотностью распределения вероятностей случайной величины X в точке x называется предел отношения вероятности попадания значений этой величины в интервал $(x, x+\triangle x)$ к длине $\triangle x$ отрезка $[x, x+\triangle x]$, когда последняя стремится к нулю:

$$\rho(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{P\Big(x < X < x + \triangle x\Big)}{\triangle x}, \tag{1}$$

то есть

$$\rho(x) = F'(x). \tag{2}$$

График функции плотности распределения называется кривой распределения. Зная функцию $\rho(x)$, можно найти интегральную функцию распределения $F(x)$ по формуле

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(x)\, dx. \tag{3}$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

- Плотность распределения $\rho(x)$ — неотрицательная функция, то есть $\rho(x) \geq 0$;
- В точках дифференцируемости функции распределения $F(x)$ ее производная равна плотности распределения: $F'(x) = \rho(x)$;
- Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty; +\infty)$ от плотности распределения $\rho(x)$ равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\, dx = 1. \tag{4}$$

- Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), определяется формулой

$$P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} \rho(x)\, dx. \tag{5}$$

- Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то $\rho(x) = 0$ при $x < a$ и $x > b$.

9.1. Составьте:

1) закон распределения числа выпавших очков при бросании игральной кости;

2) функцию распределения этой случайной величины и изобразите ее графически.

Решение. Обозначим через X — число выпавших очков при бросании игральной кости. Эта случайная величина может принимать одно из значений 1, 2, 3, 4, 5, 6 с одинаковой вероятностью $\frac{1}{6}$. Отсюда закон распределения ее будет иметь вид

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Составим функцию распределения случайной величины X. Известно,что функция распределения $F(x) = P(X < x)$, тогда:

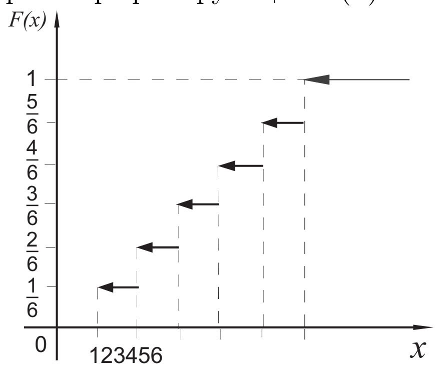
1) при $x \le 1 \quad P(X < x) = 0$, так как ни одно значение x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ не является меньше x, то есть $F(x) = 0$;

2) при $1 < x \le 2 \quad P(X < x) = \frac{1}{6}$, так как только значение $x_1 = 1$ будет меньше x, а событие $X = 1$ появляется с вероятностью, равной $\frac{1}{6}$, то есть $F(x) = \frac{1}{6}$;

3) при $2 < x \le 3 \quad P(X < x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, так как значениями, меньшими x, будут $X = 1$ и $X = 2$, а так как случайная величина X может принять либо первое, либо второе значение, то вероятность того, что $X < x$ будет равна сумме вероятностей $p_1 = \frac{1}{6}$ и $p_2 = \frac{1}{6}$, то есть $F(x) = \frac{1}{3}$, и так далее. Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ \frac{1}{6} & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ \frac{2}{6} & \text{при} \quad 2 < x \le 3, \\ \frac{3}{6} & \text{при} \quad 3 < x \le 4, \\ \frac{4}{6} & \text{при} \quad 4 < x \le 5, \\ \frac{5}{6} & \text{при} \quad 5 < x \le 6, \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$.



Заметим, что при построении ряда распределения случайной величины могут быть использованы и комбинаторика, и действия над событиями. Задачи 9.2, 9.3, приведенные ниже, допускают решение двумя способами.

9.2. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, остальные — красные. Из этой урны извлекаются три шара. Постройте ряд распределения числа появившихся в выборке голубых шаров.

Решение. Пусть случайная величина X — число голубых шаров в выборке. Среди трех наудачу извлеченных шаров голубой может не появиться ни разу, один раз, дважды и три раза. Соответственно случайная величина X примет значения 0, 1, 2, 3. Найдем вероятность появления голубого шара в каждом случае.

Обозначим событие, состоящее в появлении голубого шара через "Г", красного — через "К".

$X = 0$. Если в выборке не оказалось ни одного голубого шара, следовательно, все три извлеченные шара красного цвета. Вероятность извлечь подряд три шара красного цвета (используя теорему об умножении вероятностей)

$$P(X = 0) = P(\text{ККК}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35}.$$

$X = 1$. Событие A наступает в случае ГКК, КГК, ККГ. Тогда

$$P(X = 1) = P(\text{ГКК}) + P(\text{КГК}) + P(\text{ККГ}) = 3 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{35}.$$

$X = 2$. Событие A наступает в случае ГГК, ГКГ, КГГ. Тогда

$$P(X = 2) = P(\text{ГГК}) + P(\text{ГКГ}) + P(\text{КГГ}) = 3 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{35}.$$

$X = 3$. Событие A наступает в случае ГГГ. Тогда

$$P(X = 3) = P(\text{ГГГ}) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}.$$

Составляем ряд:

X	0	1	2	3
P	1/35	12/35	18/35	4/35

Отметим, что $1/35 + 12/35 + 18/35 + 4/35 = 1$, то есть выполнено равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

9.3. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Постройте ряд распределения числа стандартных извлеченных деталей.

Решение. Среди 2-х взятых наудачу деталей может не оказаться ни одной стандартной, могут появиться одна или две стандартные детали. Следовательно, случайная величина X может принимать только три значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Найдем вероятности этих значений:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45};$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

Следовательно, случайная величина X имеет закон распределения:

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

9.4. В билете три вопроса. Вероятность того, что студент правильно ответит на один вопрос, равна 3/4. Постройте ряд распределения числа правильных ответов.

Решение. Из трех вопросов билета студент может не ответить ни на один вопрос, дать ответ на один вопрос, на два, знать ответ на все три вопроса билета. Следовательно, случайная величина X может принимать значения: $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$. Вычислим соответствующие вероятности и составим таблицу. Обозначим через A_i — событие, состоящее в том, что студент знает ответ на вопрос, и $\overline{A_i}$ — студент не знает ответа на вопрос. Вероятность того, что студент не знает билета вообще:

$$P(X = 0) = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}.$$

Вероятность того, что студент знает какой-нибудь один вопрос из трех предложенных:

$$P(X = 1) = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 =$$
$$= \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{64}.$$

Вероятность того, что студент знает каких-нибудь два вопроса из трех предложенных:

$$P(X=2)=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3=$$
$$=\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4}=\tfrac{27}{64}.$$

Вероятность того, что студент знает весь билет:

$$P(X=3)=A_1\cdot A_2\cdot A_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{64}.$$

Итак, ряд распределения вероятностей имеет вид:

X	0	1	2	3
P	1/64	9/64	27/64	27/64

При составлении ряда распределения случайной величины X здесь можно было использовать формулу Бернулли (13). Тогда по условию задачи $n=3$, $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{1}{4}$. Искомые вероятности:

$$P(X=0)=C_3^0\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^0\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^3=\tfrac{1}{64};$$
$$P(X=1)=C_3^1\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2=\tfrac{1}{64};$$
$$P(X=2)=C_3^2\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^1=\tfrac{27}{64};$$
$$P(X=3)=C_3^3\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^0=\tfrac{27}{64}.$$

Случайная величина X — число правильных ответов — подчинена биномиальному распределению.

9.5. Плотность вероятности случайной величины X задана функцией

$$\rho(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \frac{x}{2} & \text{при} \quad 0\le x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала $(1,2)$.

Решение. Искомую вероятность найдем по формуле (5):

$$P(1<X<2)=\int_1^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{x^2}{4}\Big|_1^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

9.6. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{x^2}{1+x^2} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Найдите ее плотность распределения.

Решение. Плотность распределения $\rho(x)$ и функция распределения $F(x)$ связаны соотношением (2). В соответствии с равенством (2) находим:

$$\begin{aligned} &\rho(x) = F'(x) = \left(\tfrac{x^2}{1+x^2}\right)' = \tfrac{2x(1+x^2)-2x\cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \\ &= \tfrac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad \text{при} \qquad x > 0; \\ &\rho(x) = F'(x) = 0 \qquad \text{при} \qquad x \le 0. \end{aligned}$$

Итак, плотность распределения вероятностей данной случайной величины определяется функцией

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

9.7. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ a \cdot \sin x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Найдите:

1) параметр a;

2) интегральную функцию распределения $F(x)$;

3) вероятность попадания случайной величины на участок $(\pi/2, \pi)$.

Постройте графики $F(x)$ и $\rho(x)$.

Решение. 1) Параметр a определяем, исходя из свойства плотности распределения вероятностей (4). Данная функция $\rho(x)$ отлична от нуля на отрезке $[0; \pi]$, поэтому

$$\int\limits_0^\pi a \cdot \sin x \, d\,x = 1,$$

отсюда

$$a \cdot \left(-\cos x \Big|_0^{\pi} \right) = 1, \qquad a = \frac{1}{2}.$$

2) Находим интегральную функцию распределения по формуле (3)

$$F(x) = \int_0^x \rho(t)d\,t = \frac{1}{2}\int_0^x \sin t\,d\,t = -\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos x.$$

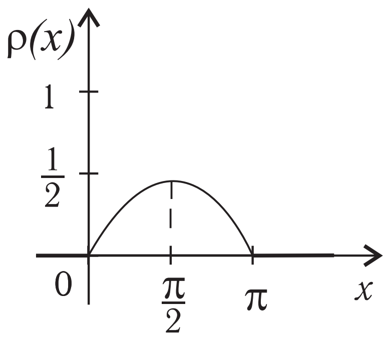
Согласно свойствам интегральной функции $F(x)$ имеем

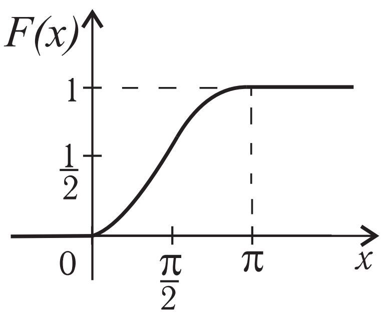
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

3) Вычисляем вероятность попадания непрерывной случайной величины на заданный участок по формуле (5)

$$P(\pi/2 < X < \pi) = \frac{1}{2}\cdot\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,d\,x = \frac{1}{2}(1+\cos x)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Строим графики функций:





9.8. Найдите функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, плотность вероятности которой определена функцией

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0 \quad \text{и} \quad x > 2, \\ x & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 2 - x & \text{при} \quad 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Решение. Чтобы найти функцию распределения $F(x)$, воспользуемся формулой (3).

При $x \le 0$ получаем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx = 0$.

При $0 < x \le 1$ находим

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} \rho(t)dt + \int\limits_{0}^{x} \rho(t)dt = \\ = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{x} t dt = 0 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

При $1 < x \le 2$ находим

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} \rho(t)dt + \int\limits_{0}^{1} \rho(t)dt + \int\limits_{1}^{x} \rho(t)dt = \\ = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int\limits_{0}^{1} t dt + \int\limits_{1}^{x} (2-t)dt = 0 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x = \\ = \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

При $x > 2$ получаем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)dt = F(2) + \int_{2}^{x} 0 \cdot dt = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{x^2}{2} & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

9.9. Составьте закон распределения суммы числа очков, выпавших при одновременном бросании двух игральных костей.

9.10. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. Постройте ряд и многоугольник распределения числа очков, засчитанных стрелку.

9.11. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5, вторым 0,4. Составьте закон распределения числа попаданий в мишень и постройте многоугольник распределения.

9.12. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Составьте:

1) закон распределения числа израсходованных патронов;

2) функцию распределения числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 1/4.

9.13. Партия из 20 изделий содержит три бракованных. Наудачу берутся 4 изделия. Среди этих четырех изделий число бракованных является случайной величиной X. Найдите ряд распределения случайной величины.

9.14. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{при} \quad -1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Постройте ее график и найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(0, 1)$.

9.15. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos x) & \text{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Найдите: 1) плотность распределения $\rho(x)$; 2) вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(0, \pi/4)$. Постройте графики $F(x)$ и $\rho(x)$.

9.16. Случайная величина X задана дифференциальной функцией

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ bx^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найдите: 1) коэффициент b; 2) функцию $F(x)$; 3) вероятность попадания на участок $(0, 3)$. Постройте графики функций $F(x)$ и $\rho(x)$.

9.17. Контролер проверяет из партии не более 4 деталей. При обнаружении нестандартной детали проверка прекращается и партия задерживается. Составьте закон распределения случайной величины числа подвергшихся проверке деталей, если известно, что вероятность выхода нестандартной детали равна 0,1.

9.18. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составьте:

1) закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе всего 4 библиотеки и все они имеют нужную ему книгу;

2) функцию распределения этой случайной величины.

9.19. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$\rho(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}}, \quad (-\infty < X < +\infty).$$

Определите: 1) коэффициент A; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) вероятность того, что случайная величина X примет значение не меньше 1.